چند مفهوم کلیدی ریاضی دورهٔ ابتدایی

محمدحسام قاسمی
دبیر ریاضی شهرستان شهریار و کارشناس ارشد ریاضی

اشاره

مطلب پیش رو گزیده‌ای از کتاب «مفاهیم کلیدی در تدریس ریاضیات دوره ابتدایی» است که «درک هایلوک» و «فیونا تانگاتا»، نویسندگان این کتاب، با تألیف آن تلاش دارند چهل‌وچهار مفهوم مطرح (موضوع کلیدی و مهم) در برنامه درسی ریاضی دورهٔ ابتدایی را به شیوه‌ای موجز و به نسبت جذاب و با ادبیاتی علمی اما نه‌چندان پیچیده، معرفی و تبیین نمایند. برای هر کدام از مفاهیم کتاب، در ابتدا معرفی اجمالی تحت عنوان «تعریف» ارائه شده است و پس از آن توضیح کامل‌تری که دربرگیرندهٔ تاریخچه، مطالعات انجام شده و نظرات گوناگون در باب آن مفهوم می‌باشد، تحت عنوان «توضیح و بحث» آمده است. بعد از شرح توضیحات نظری در مورد مفهوم، نویسندگان به‌منظور کمک به خواننده، سعی در ارائه نمونه‌های عملی تحت عنوان «مثال‌های عملی» دارند تا چگونگی به‌کارگیری آن مفهوم در کلاس درس را روشن سازند و در قسمت بعدی، به معرفی منابع کمکی تحت عنوان «مطالعهٔ بیشتر» می‌پردازد که می‌تواند برای مطالعهٔ بیشتر پیرامون آن مفهوم، مورد توجه قرار گیرد.

کلیدواژه‌ها: جست‌وجوگری، ساخت‌وسازگرایی، تعمیم، حل مسئله، استفاده و به‌کارگیری ریاضی، یادگیری مفهوم، بقای کمیت، تعمیم‌سازی، تعدی (ترایایی)، الگوریتم، برقراری ارتباط، یادگیری طوطی‌وار

جست‌وجوگری (بررسی کردن و تحقیق)[1]

تعریف

منظور ما از «بررسی‌کردن» یا «جست‌وجوگری» (تحقیق) در حوزهٔ آموزش ریاضی و به‌خصوص در این بخش از کتاب، تکلیف‌هایی است که به دانش‌آموزان داده می‌شود که برای انجام آن‌ها، از ریاضی استفاده می‌شود و هدف اصلی این است که دانش‌آموزان، سؤال‌های خود را طرح کنند، رویکردهای خودشان را تعیین کنند، روش‌ها را بیازمایند، دست به اکتشاف بزنند و از طریق یافته‌های خود، بتوانند به تفصیل و روشنی، با دیگران ارتباط برقرار کنند. روابطی که طی یک تحقیق توسط دانش‌آموز کشف می‌شوند، معمولاً راحت‌تر یاد گرفته می‌شوند، زیرا دانش‌آموز نسبت به نتایج حاصل از تحقیق خود،

احســاس مالکیت می‌کند و یافته‌ها و نتایج، از پایداری بیشتری در ذهن‌شان برخوردار است.

توضیح و بحث

موضوع جســتوجوگری در ریاضی، پس از انتشــار گزارش کاکروفــت (۱۹۸۲)، اهمیت خاصی در مدارس بریتانیــا پیدا کرد. در بند مشــهور ۲۴۳ از این گزارش، به شــش رکن اصلی در آموزش ریاضی که لازم است در تمام ســطوح تدریس لحاظ گردند، اشاره شده است که بررسی و جســتوجوگری، یکی از آن‌هاست. این شش رکن اساســی عبارت از توضیح توسط معلم، گفت‌وگو و بحث بین معلم و دانش‌آموزان و دانش‌آموزان با یکدیگر، فعالیت عملی و کلاســیِ مناسب، تمرین و تکلیف برای تثبیتِ یادگیری، حل مسئله و در نهایت، انجام کارهایی به روشِ جســتوجوگری است. با این حال، با وجود آن که کاکروفــت بر دو موضوع حل مســئله و تکلیف‌های تحقیقی تأکید داشــت، اما باز هم برای موضوع «تمرینِ خــوب در تدریس ریاضی[۲]» کــه در دهه‌های ۷۰ و ۸۰ میلادی مطرح شد، کاری بیش از حمایت انجام نداد. به محض انتشار گزارش کاکروفت در مورد اهمیت تحقیق و جست‌وجوگری در آموزش ریاضی، فعالیت‌های عجولانه و همراه با سراســیمگی برای ترویج این رویکرد - چه در بین ناشــران مواد آموزشــی و چه در بین سیاستگذاران برنامه‌های درســی در هر دو دورهٔ ابتدایی و متوســطه- انجام شد.

امــا چارچوب اســتراتژی ســواد عــددی[۳] (1999 b,DfEE) در اواخر دههٔ ۹۰ میلادی، نسبت به کاهش اســتفاده از روش‌های تدریسِ مبتنی بر جست‌وجوگری پــس از اوج‌گیــری افراطی اســتقبال از آن در دههٔ ۸۰ میلادی، هشــدار می‌دهد. هم‌چنیــن، پایین آمدن تب استفاده از رویکرد جست‌وجوگری، تقریباً طبیعی و قابل پیش‌بینی بود، زیرا مدارس ابتدایی انگلستان، بیشتر به حرکت در چارچوب برنامه‌های ســالانه تمایل داشتند و حتــی خود را موظف کرده بودنــد که مطابق برنامه‌های درســی که اغلب نتیجه‌گرا[۴] بودند، عمل کنند. علاوه بر این، نتیجه گرفتن در ارزشــیابی‌های ملی، بر همه چیز ســایه انداخته بود و به همین دلیــل، در مدارس جایی یا زمانی برای انجام فعالیت‌های زمان‌برِ جست‌وجوگری، یــا از دید معلمان هر چیزی که خــارج از اهداف خاص و تمرکز بر دانش و مهارت‌های مورد نظر برنامه باشــد، وجود نداشــت. با این حال، استراتژی ملی برای مدارس ابتدایی در سال ۲۰۰۶، یک بار دیگر و با صراحت بیشتر، انجام فعالیت‌های جســتوجوگری را در برنامهٔ درســی ریاضی مــدارس ابتدایی مورد تأکید قرار داد. در نتیجه، رویکرد جســتوجو- محور، به‌عنوان یکــی از پنج جزءِ کلیدی در بخش اســتفاده و کاربردی کردن ریاضی در برنامهٔ بازبینی‌شدهٔ مدارس ابتدایی، به رسمیت شناخته شده و در آن گنجانده شد. مطالعات انجام شده، حکایت از همبستگی مثبت بین موفقیت در ریاضی و به‌کارگیری رویکرد جســتوجوگری در تدریس ریاضی دارند. بنا به تأکید دفتر آموزش و مهارت‌ها (DfES)، «هنگامی که دانش‌آمــوزان در فرایندی مشــارکت می‌کنند که خود دست به اکتشــاف می‌زنند و می‌کوشــند که خودشان اقدام به طراحی مســئله و یافتن راه حل برای آن بکنند و بالاخره، یافته‌هایشــان را جمع‌بندی کرده و با دیگران به اشــتراک می‌گذارند. در این صورت، دانش‌آموزان یک فرایند یادگیری موفق و هیجان‌انگیز را تجربه کرده‌اند». (DfES, 2006 b: 9)

بــا ایــن اوصاف، جهــت کمک بــه معلمــان برای طراحی تدریس‌های مبتنی بر رویکرد جســتوجوگری، پیشنهادهایی ارائه می‌کنیم تا در ایجاد چنین فرصت‌هایی برای دانش‌آموزان، مفید واقع شوند:

- اجازه دهیم که دانش‌آموزان، با تکلیفی که برایشــان جذاب، چالش‌برانگیز و محرک است درگیر شوند؛
- اجازه دهیم که دانش‌آموزان، آزادانه سؤال‌های خود را دربارهٔ موقعیت‌های ریاضی، طرح کنند؛
- اجازه دهیم دانش‌آموزان، آزادانه رویکردهای خود را طراحی کنند؛
- بــه دانش‌آمــوزان توصیــه کنیــم کــه از دانش‌ها و مهارت‌هــای مهم ریاضی که در اختیار دارند، اســتفاده کنند؛
- این امر خیلی مهم اســت که دانش‌آموزان، خودشان کشــف کنند و مزهٔ یافتن چیزها را توســط خود، تجربه کنند؛
- دانش‌آمــوزان بتوانند یافته‌های خــود را به وضوح و روشنی، با دیگران، در میان بگذارند؛
- لازم است که دانش‌آموزان، نتایج جست‌وجوگری‌های خود را با سایر موضوع‌ها و مفهوم‌های مربوط در ریاضی، مرتبط سازند. بدین ترتیب، توسعهٔ درک مفاهیم و روابط ریاضی در دانش‌آموزان، افزایش می‌یابد.

در جهــت اجــرای بهتــر ایــن مــوارد، راهنمــای دستورالعملِ دفتر آموزش و مهارت‌ها (DfES) پیشنهاد می‌کند که در اوایل کارِ جســتوجوگری، ســؤال‌هایی توســط معلم، در اختیارِ دانش‌آموزان قرار گیرد. اما بعد از آنکــه دانش‌آموزان مهارت‌های بیشــتری در طراحی و ســازماندهیِ روش‌ها و راهبردها کســب کردند و برای جست‌وجوگری و تحقیق آماده‌تر شدند و اعتمادبه‌نفس بیشتری به‌دســت آوردند، می‌توان ســؤال‌های جدید و چالش‌برانگیزی در اختیار آن‌ها قرار داد تا خودشان پس از بحث و بررســی، آن‌هایی را که به نظرشــان می‌تواند

هنگامی‌که دانش‌آموزان در فرایندی مشارکت می‌کنند که خود دست به اکتشاف می‌زنند و می‌کوشند که خودشان اقدام به طراحی مسئله و یافتن راه حل برای آن بکنند و بالاخره، یافته‌هایشان را جمع‌بندی کرده و با دیگران به اشتراک می‌گذارند. در این صورت، دانش‌آموزان یک فرایند یادگیری موفق و هیجان‌انگیز را تجربه کرده‌اند

جذاب باشـد، برای جسـت‌وجوگری انتخـاب نموده و فعالیت خود را آغاز کنند (DfES, 2006 b: 9).

جست‌وجوگری در ریاضیات دورهٔ ابتدایی، به‌خصوص از این نظر مهم است که تجربه‌های لذت‌بخشی از ریاضی را بـرای دانش‌آموزان مهیا می‌سـازد و در ایشـان برای تعامل با ریاضی، ایجاد انگیزه می‌کند و طرز تلقی مثبت را نسـبت به ریاضی افزایش می‌دهد. هنگامی‌که چیزی را خودمان کشـف می‌کنیم، آن کشف، تأثیر بیشتری بر یادگیری ما خواهد داشت. زیرا علاوه بر یادگیری دانش موجود در آن بررسـی، اسـتفاده از الگوریتم‌ها، قواعد و روش‌های به‌کار گرفته شـده در فرایند جست‌وجوگری نیز، می‌تواند به توسـعهٔ درک عمیق‌ترمان از روابط کلی موجود بر مسائل ریاضی، کمک کند. به گفتهٔ یاورسکی[5] (۲۰۰۳: ۲)، «روش پرسـش‌گری و جست‌وجوگری در تدریس ریاضی، با اصول ساخت‌وسازگرایی در یادگیری مطابقت دارد، زیرا سرشار از چالش‌های برانگیزانندهٔ تفکر ریاضی و فرصت‌هایی برای بازخوردهای اساسی در درک و فهم ریاضی است». برای آنکه معلم از پیشرفت کار این نوع فعالیت‌ها توسـط دانش‌آموزان خود آگاه و مطمئن شـود، حتماً لازم اسـت کـه پس از پایان هـر فعالیت، زمانی را به بررسـی و ارزیابـی آن کار اختصاص دهد و به دانش‌آموزان کمک کند تا بر آن‌چه که یافته‌اند، تأمل کنند و با بازتاب بر آن‌ها، راجع به نتایج جست‌وجوهای خود، سؤال کنند.

مثال‌های عملی

در این بخش، پنج نقطهٔ شـروع برای انجام یک کار جست‌وجوگری پیشـنهاد شده است. آن‌چه که در همهٔ ایـن مثال‌ها مورد نظر بوده، آن اسـت که دانش‌آموزان فرصتی داشته باشند تا خود، سؤال‌هایی را صورت‌بندی نموده، رویکرد مناسبی تعیین کرده و خودشان به کشف و حل آن بپردازند.

۱. چه چیزهایـی را می‌توانید در کلاس پیدا کنید که از یک مداد سنگین‌تر و از یک قیچی سبک‌تر باشد؟ آیا می‌توانید سؤال‌های مشابه دیگری طرح کنید (برای اشیاء یا مکان‌های متفاوت).

۲. فـرض کنید جعبه‌ای در اختیار دارید که در آن، میله‌هایی بـه طول‌های ۴، ۶، ۸، ۱۰ و ۱۲ سـانتی‌متر باشـد. چشم‌هایتان را ببندید و ۳ تا از میله‌ها را انتخاب کنید. از آن ۳ میله به‌عنوان ۳ ضلع یک مثلث اسـتفاده کنید. آیا شما می‌توانید . . .؟

۳. بچه‌هـا! امروز موضوع جالبـی را مطرح می‌کنم و می‌خواهـم که آن را بررسـی کنیـد. روز تولد مگ و پـدرش یکی اسـت. یک اتفاق جالب‌تـر اینکه رقم‌های سن مگ، همان رقم‌های سن پدرش است، با این تفاوت که رقم‌های عدد سـن مگ، برعکسِ رقم‌های عدد سن پدرش است. مگ دوسـت دارد بداند که آیا دوباره، این اتفاق تکرار خواهد شـد؟ آیا قبل از ایـن هم این اتفاق افتاده بوده است؟

۴. بچه‌ها! برویـد چهار برگ کاغذ با اندازه‌های A_2، A_3، A_4 و A_5 تهیـه کنید. بعد ببینید چه نکات جالبی در مورد اندازه‌های آن‌ها کشـف می‌کنیـد و اندازهٔ این کاغذها، چه ارتباطی با یکدیگر دارند؟ حالا اگر برگ‌های کاغـذ A_1، A_0 و A_6 نیـز اضافه کنید، متوجه چه نکتهٔ شگفت‌انگیزی می‌شوید؟ حالا بدون اینکه کاغذهای A_7 و A_{10} را از قبل تهیه کنید، پیش‌بینی شما راجع به رابطهٔ بین اندازه‌های آن‌ها با اندازهٔ کاغذهای قبلی چیست؟

۵. اگر در یک جدول ۴×۴ مانند شـکل ۱، اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را به دنبال هم و بارها و بارها در یک صفحه با چهار خانهٔ مربعی در هر ردیف بنویسیم، چه می‌شود؟ آیا می‌توانید الگوهای منظمی را که عددها در این جدول می‌سازند، مشخص کنید؟ بررسی کنید که اگر از دنبالهٔ اعـداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ اسـتفاده کنیـم، آن وقت چه الگوهای دیگری در سـطرها، ستون‌ها یا به شکل اریب، به وجود خواهد آمد؟ آیا می‌توانید توضیح دهید که چرا ایـن الگوها به وجود می‌آیند؟ آیـا می‌توانید پیش‌بینی کنید که با اضافه‌کردن سـطرهای بیشتر به جدول، چه اتفاقی خواهد افتاد؟ سـؤال‌های دلخواه دیگری در مورد ایـن جدول، ابعاد و اعدادش مطرح کنید و خود به آن‌ها پاسخ دهید.

۲	۳	۴	۵
۳	۴	۵	۱
۴	۵	۱	۲
۵	۱	۲	۳
۱	۲	۳	۴
۲	۳	۴	۵
			۱

شکل ۱: در این جدول، چه الگوهایی را مشاهده می‌کنید؟

مطالعهٔ بیشتر

بورتـون[6] (۱۹۸۴)، چنـد راهنمایـی مفیـد برای به‌کارگیـری رویکـرد حل مسـئله همراه با بررسـی و جسـت‌وجوگری (تحقیق) ارائه می‌کنـد و علاوه بر آن، نمونه‌هایی عملی همراه با تحلیل نیز عرضه کرده است که بـرای ایجاد انگیزه و درگیرکردن دانش‌آموزان با مفاهیم ریاضی، بسیار مفیدند. هم‌چنین، مجموعه‌ای از ایده‌های

مفید در رابطه با یادگیری به کمک تحقیق، توسط تییر[۷] (۱۹۹۳) گردآوری شده است. تاکر[۸] (۲۰۰۵) نیز به اصول و چارچوبی که باید در انجام یک کار جست‌وجو-محور، مورد توجه قرار داد اشاره می‌کند. این مجموعه، یکی از منابع مهم در زمینهٔ جست‌وجوگری و راهنمای مفیدی برای «استفاده و به‌کارگیری ریاضی[۹]» است که بخشی کلیدی از استراتژی ملی برای مدارس ابتدایی در انگلستان (2006 b, DfES) محسوب می‌شود.

یادگیری اصل‌ها[۱۰]

تعریف

«اصل‌ها» (قوانین)، حقایقی مشخص، عمومی و پایه‌ای در ریاضی هستند که به‌دلیل پیش‌نیاز و پایه‌ای بودنشان در فهم و درک یادگیرنده، به‌خاطرسپاری و یادگیری آن‌ها از جانب دانش‌آموزان بسیار اهمیت دارد. هم‌چنین، به این دلیل که برنامهٔ درسی ریاضی دورهٔ ابتدایی سرشار از اصل‌های مهم در ریاضی است، آموزش آن‌ها نیز باید مورد توجه قرار گیرد.

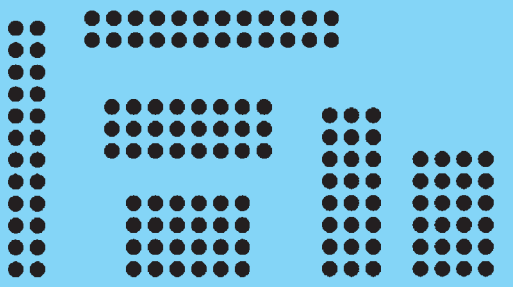
توضیح و بحث

در سلسله مراتب یادگیری گانیه (۱۹۷۰)، یادگیری اصول در سطحی بالاتر از یادگیری مفهوم طبقه‌بندی شده است و این شاید به این دلیل است که اصول، به وجود برخی روابط بین چند مفهوم که قبلاً باید فراگرفته شده باشند، اشاره دارد و در نتیجه، یادگیری مفاهیمِ به‌کار رفته در یک اصل، می‌بایست مقدمه‌ای برای یادگیری آن اصل باشند.

برای روشن‌تر شدن مطلب بالا، بر یکی از اصول مهم در ریاضیات ابتدایی تأکید کرده و آن را تشریح می‌کنیم. این اصل، خاصیت «جابه‌جایی عمل ضرب» نام دارد. پیش‌نیاز فهمیدن این اصل، مفاهیمی چون «ضرب»، «بزرگ‌تری» و «تساوی» و مرتبط شدنشان از طریق این اصل است. اصل جابه‌جایی ضرب، در واقع تعمیم و تجریدی از این حقیقت است که اگر یک عدد را از هر طرف در عددی دیگر ضرب کنیم، حاصل یکسان خواهد بود. برای مثال، حاصل‌ضرب ۵×۷ با ۵×۷ مساوی است؛ اما در تبیین یک اصل نمی‌توان تنها به مثال‌ها اکتفا کرد و باید آن را به‌صورت یک عبارت با زبان رسمی و مجرد، بیان نمود. دلیل این کار نیز، عمومی بودن یک اصل است، در حالی که مثال‌ها فقط به موارد خاص اشاره می‌کنند. برای نمونه، همین اصل جابه‌جایی ضرب را می‌توان به‌صورت «برای هر دو عدد p و q، همواره $p\times q=q\times p$»، بیان کرد.

زمانی اهمیت یادگیری اصول بیشتر می‌شود که متوجه قدرت آن‌ها در کوتاه‌تر و ساده‌تر کردن روش‌ها و راهبردها در انجام مسائل ریاضی شویم. مثلاً اگر دانش‌آموزی به خوبی اصل جابه‌جایی ضرب را یاد گرفته باشد، می‌تواند هنگام روبه‌رو شدن با یک پرسش شفاهی مانند «بیست تا سه تا، چند تا می‌شه؟»، سریعاً آن را به «سه تا بیست تا چند تا می‌شه؟» تعبیر کرده و به جواب ۶۰ برسد. یا به‌طور مشابه، وقتی از دانش‌آموزی پرسیده شود که « برای خرید ۲۵ کالای یکسان که قیمت هر کدام ۱۶ پوند است، چقدر پول لازم است؟» او به جای محاسبهٔ «۲۵ تا ۱۶ تا» که کمی دشوار به‌نظر می‌رسد، محاسبهٔ «۱۶ تا ۲۵ تا» را انجام دهد.

یکی از روش‌های مفید در آموزش اصولِ ریاضی، آن است که معلمان سعی کنند موقعیت‌هایی تجربی و ملموس را برای درک بهتر دانش‌آموز از اصول در کلاس درس خود، ایجاد کنند تا دانش‌آموزانشان از نزدیک، آن اصول را خود تجربه کنند. این کار باعث می‌شود تا دانش‌آموزان، راحت‌تر یک اصل را به عنوان یک واقعیتِ ثابت و عمومی در ریاضی بپذیرند و با یادگیری بلندمدتِ آن، از مزایایی که در آینده می‌تواند برای آن‌ها به همراه داشته باشد، بهره‌مند شوند. یکی از روش‌های تجربی برای از نزدیک حس‌کردن اصل جابه‌جایی ضرب، این است که معلم با در اختیار قرار دادن ۲۴ مهره، از دانش‌آموزان بخواهد که مهره‌ها را در حالت‌های مختلف در یک آرایهٔ مستطیلی شکل، کنار یکدیگر بچینند. شکل ۲، روش‌های مختلف آرایش مستطیلی ۲۴ مهره را نشان می‌دهد.



شکل ۲: روش‌های مختلفی که می‌توان به ۲۴ مهره، آرایش مستطیلی داد.

کارهای عملی از این نوع، به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا متوجه این نکته شوند که اگر بتوانیم مهره‌ها را در ۳ سطر و ۸ ستون بچینیم، پس همان‌طور می‌توانیم آن‌ها را در ۸ سطر و ۳ ستون نیز بچینیم، یعنی عدد ۲۴ هم به ۳ تا ۸ تا و هم به ۸ تا ۳ تا ربط پیدا می‌کند.

در بسیاری از موضوعات ریاضی، فهم دقیق و صحیح از اصول مربوط به آن موضوع، اساس و پیش‌نیاز فهم و درک آن موضوع است. یعنی تا معلمان از یادگیریِ

اصول توسط دانش‌آموزان به خوبی اطمینان حاصل نکنند، یا به اندازهٔ کافی برای تثبیت آن یادگیری زمان صرف نکرده باشند، بهتر است از ارائه حجم زیادی از تکلیف‌ها و کارهای مبتنی بر آن اصول، خودداری کنند. برخی از محققان بر اولویت یادگیری اصول بر یادگیری مهارت‌ها تأکید دارند. از جملهٔ این محققان، گلمان و گالیستل[11] (۱۹۷۸) هستند که اصطلاح «اصول قبل از مهارت‌ها[12]» را در همین رابطه به‌کار برده‌اند. به‌خصوص، آن‌ها در موضوع آموزشِ شمارش به دانش‌آموزان کم سن و سال‌تر از خود، حساسیت بیشتری نشان داده و تأکید کرده‌اند که تا قبل از آنکه دانش‌آموزان یاد بگیرند چگونه اعداد را بشمارند، لازم است اصل‌ها و واقعیت‌هایی را در مورد اعداد یاد بگیرند. گلمان و گالیستل (۱۹۷۸) این اصل‌ها را این‌گونه بیان می‌کنند:

● *اصل یکی برای یکی*[13]: یعنی هنگام شمارش اشیای یک مجموعه[14]، هر شئ، تنها یک بار شمرده می‌شود و هر چند تا شئ هم که در این مجموعه باشد، باز هم فقط یک بار از آن نام برده می‌شود (به هر شئ، نام یک عدد اختصاص داده می‌شود)؛

● *اصل ثبات ترتیب*[15]: یعنی هنگام شمارش اشیاء، همیشه از یک فرایند و دنبالهٔ ثابت استفاده می‌کنیم (مثلاً همیشه بعد از ۱، ۲ است و بعد از ۲، ۳ است و . . .)؛

● *اصل کاردینال*[16]: یعنی هنگام شمارش تعداد اشیاءِ درون یک مجموعه، با شروع از اولین شئ، وقتی که به آخرین شئ می‌رسیم، عددِ نام برده شده، همان تعداد اشیای موجود در مجموعه است؛

● *اصل انتزاع*[17]: یعنی تعداد اشیای یک مجموعه و روش شمارش آن‌ها، مستقل از جنس و کیفیت آن اشیاست (تعداد اشیاء به ماهیت اشیاء، ربطی ندارد)؛

● *اصل ترتیب بی اثر*[18]: یعنی ترتیب قرار گرفتن اشیا در یک مجموعه، تأثیری بر تعداد اشیای آن مجموعه ندارد (به این اصل، بقای تعداد نیز گفته می‌شود).

پیاژه، دو اصل دیگر یعنی «اصل بقا» و «اصل انتقال» را، جزو اصول مهم و اساسی در درک و فهم کودکان از تعداد، مقدار و اندازه می‌داند. او معتقد است که کودکان باید بدانند که مقادیر (تعداد، عدد) نسبت به ترتیب، ثابت مانده و اندازه‌ها (طول، سطح، حجم و ...) نیز نسبت به انتقال، بقای خود را حفظ می‌کنند. این خیلی مهم است که معلمان مدارس ابتدایی از این اصول، آگاه باشند، زیرا شالودهٔ بسیاری از فرایندهایی است که دانش‌آموزان، بعدها، در سطوح بالاتر ریاضی با آن‌ها مواجه خواهند شد و کسب مهارت در محاسبات و توانایی حل مسئله که از اهداف سطوح بالای ریاضی هستند، همگی مشروط به فراهم شدن بستری مناسب از اصول است.

مثال‌های عملی

اصل جابه‌جایی ضرب یکی از اصول کلیدیِ ریاضیات دورهٔ ابتدایی است که در مورد آن، قبلاً بحث شد. یکی دیگر از اصول مشابه به این اصل، اصل جابه‌جایی جمع است که صورت رسمی و نمادین آن، به شکل زیر است:

(برای هر دو عدد a و b)

$a+b=b+a$

شاید وجود اصل جابه‌جایی در مورد ضرب و جمع، دانش‌آموزان را دچار این تصور نادرست کند که برای اعمال تفریق و تقسیم نیز، چنین قوانینی برقرار است. رفع سوءِ تفاهم در این زمینه، مستلزم هوشیاری معلمان است.

برای عمل جمع و ضرب، یک اصل مهم دیگر نیز موسوم به اصل «شرکت‌پذیری» وجود دارد که به‌صورت زیر ارائه می‌شود؛

(برای هر سه عدد a، b و c)

$a+(b+c)=(a+b)+c$

البته بیان این اصول برای دانش‌آموزان کم سن و سال‌تر با همین قالب نمادین و رسمی، نه تنها توصیه نمی‌شود بلکه لازم است معلمان عجله‌ای برای مطرح کردن اصول و با استفاده از نمادها نداشته باشند. در عوض، معلمان می‌توانند با طراحی مثال‌ها و فعالیت‌های مناسب و ساده، دانش‌آموزان را به‌طور ضمنی، از وجود چنین اصول مهمی در ریاضی، آگاه سازند.

هم‌چنین، اصل‌های بسیار پایه‌ای دیگری نیز وجود دارند که می‌توانند مبنای کار در بیشتر محاسبات قرار گیرند که برای نمونه، می‌توان به اصل «توزیع‌پذیری» یا «پخش‌پذیری» اشاره کرد (البته اینجا فقط از سمت راست) معرفی می‌شوند:

(برای هر سه عدد a، b و c)

$(a+b)\times c=(a\times c)+(b\times c)$

$(a-b)\times c=(a\times c)-(b\times c)$

$(a+b)\div c=(a\div c)+(b\div c)$

$(a-b)\div c=(a\div c)-(b\div c)$

مجدداً متذکر می‌شویم که ارائه این اصول در پایه‌های پایین‌تر در مدارس ابتدایی به همین شکل نمادین و انتزاعی، نه لازم و نه مناسب است؛ اما با این حال، اشاره به‌وجود چنین قوانینی و به‌کارگیری آن‌ها در محاسبات، می‌تواند راه‌گشای انجام بسیاری از محاسبات ریاضی باشد که در آن‌ها، استفاده از الگوریتم‌های رسمی زمان‌بر است. مثلاً عملیات ۳÷۶۹ را در نظر بگیرید. می‌توانیم به دانش‌آموزان خود یاد دهیم که به جای استفاده از روش مستقیم تقسیم، از اصل توزیع‌پذیری استفاده کنند. یک بار عدد ۶۰ را بر عدد

۳ و یـک بـار نیز عـدد ۹ را بر عدد ۳ تقسـیم کنند و در نهایـت، حاصل این تقسـیم‌ها را با هم جمع کنند تا به جواب ۲۳ برسـند. در واقـع، ما به آن‌ها یاد می‌دهیم که به جـای انجام مسـتقیم ۶۹÷۳، معـادل آن یعنی (۹÷۳)+ (۶۰÷۳) را انجام دهند.

مطالعهٔ بیشتر

بریانت (در نانس و بریانت، ۱۹۹۷؛ صص. ۶۹-۵۴)، تحلیل جامعی از فهـم و درک کودکان از اصول مربوط به اعداد و یادگیری آن اصول ارائه می‌کنند. به‌ویژه اینکه آن‌ها مقایسـهٔ جالبی بین اصولی که گلمان و گالیستل (۱۹۷۸) به آن‌ها اشاره کرده‌اند و اصولی که پیاژه مطرح می‌کند، انجـام داده و این اصول را در قیاس با یکدیگر، مورد تحلیل قرار داده‌اند. برای توضیح بیشتر و دست‌یابی به مثال‌های تکمیلی، به‌ویژه در رابطه با اصول جابه‌جایی، شـرکت‌پذیری و توزیع‌پذیـری، می‌توانیـد به هایلاک (۲۰۰۱؛ صص. ۵۶-۴۵) مراجعه کنید. هم‌چنین، برای مقایسـهٔ یادگیری اصول با یادگیـری مفهوم‌ها و درک تفاوت‌هـای بین ایـن دو، می‌توانید بـه فصلی از کتاب شاموی[19] (۱۹۸۰) که توسط سودر[20] نگاشته شده است، مراجعه کنید.

نتیجه گرفتن در ارزشیابی‌های ملی، بر همه چیز سایه انداخته بود و به همین دلیل، در مدارس جایی یا زمانی برای انجام فعالیت‌های زمان‌برِ جست‌وجوگری، یا از دید معلمان هر چیزی که خارج از اهداف خاص و تمرکز بر دانش و مهارت‌های مورد نظر برنامه باشد، وجود نداشت

یادگیری مهارت[21]

تعریف

«مهـارت» را می‌تـوان چیـزی دانسـت کـه یک یادگیرنده، با آن، می‌تواند چیزی را که یاد گرفته، انجام دهد و این فعلِ انجام دادن را با رفتاری که دارای سطحی قابل قبول از شایسـتگی اسـت، همراه سازد. به‌ویژه که یادگیرنده باید قادر باشد انجام آن فعل را با دقت، کارایی بـالا، به‌طور مکرر و هر وقت که لازم باشـد، انجام دهد. رفتارهایـی که در دورهٔ ابتدایی می‌توان آن‌ها را در قالب مهارت‌هایی گنجاند که باید یاد گرفته شوند، به‌طور عمده عبارتند از مهارت‌های محاسـبهٔ مکتوب (قلم و کاغذ) و ذهنی، مهارت‌هـای به‌کارگیری ریاضی در موقعیت‌های واقعی و مهارت‌های کار با ابزار، وسـایل یا دستگاه‌هایی که برای انجام محاسـبات ریاضی، ساخته شده‌اند مانند ابزارهای رسم و ماشین‌حساب‌ها، یا دیگر ابزارهایی که در آن‌ها، تا حدودی از ریاضی استفاده شده است.

توضیح و بحث

در رده‌بنـدی مراحـل یادگیـری گانیـه (۱۹۷۰)، «یادگیری مهارت»، به‌عنوان یکی از یادگیری‌های سطح پایین رده‌بندی شـده اسـت و بیان شده که «یادگیری مهارت» در مقایسـهٔ بـا مراحل بـالای یادگیری، مانند «فهمیـدن»، «حل مسـئله» و «تفکر خلاق»، نسـبتاً سـاده‌تر یاد گرفته شـده و ارزیابی می‌شـوند و تدریس مهارت‌ها نسـبت به دیگر موضوعات، آسـان‌تر است. در معرفـی بالا از مهارت، از یک دسـته‌بندی کلی در مورد مهارت‌هایـی که در دورهٔ ابتدایـی یادگیری آن‌ها مورد انتظار است، سـخن به میان آمد. اما به‌طور جزئی‌تر، به برخـی از مهارت‌هایی که باید در ریاضی دورهٔ ابتدایی از جانب دانش‌آموز کسب شوند، اشاره کنیم:

۱. شمارش اعداد از ۰ تا ۱۰۰ رو به جلو و برعکس از ۱۰۰ تا ۰، یا اصلاً شمارش با شروع از هر عدد دیگری تا عدد ۱۰۰.

۲. جمع یک عـدد یک‌رقمی با یک عدد دورقمی و تفریـق یک عدد یک‌رقمی از یک عدد دورقمی به روش شـمارش ذهنی، و کم یا زیاد کـردن عدد یک‌رقمی از عدد دورقمی.

۳. تفریق اعداد سه‌رقمی از یکدیگر به کمک تفریق به روش تجزیه.

۴. اسـتفاده از یک خط‌کش ۳۰ سانتی‌متری برای رسم خطوط با طول ۱ سانتی‌متر تا ۳۰ سانتی‌متر.

۵. خواندن صحیح ساعت‌های عقربه‌ای.

معمولاً حرفه‌ای شدن در انجام مهارت‌ها (ماهر شدن در مهارت‌هـا) به چند عامل مهـم از جمله میزان بالای «تخصص[22]»، «دقت[23]»، «کارآمدی[24]» و «سـرعت[25]»، بستگی دارد. ممکن است برای ایجاد مهارت‌های مختلف، تأثیر و نسـبت این عوامل متفاوت باشـد. مثلاً در مورد مهارت شـمارهٔ ۳، لازم است دانش‌آموز برای آنکه نشان دهد به خوبی می‌تواند این مهارت را کسـب کند، اولاً از تخصص و خبره‌گی لازم برخوردار باشـد و ثانیاً با دقت این کار را انجام دهد و دارای کمترین میزانِ خطا باشد. هم‌چنین یک دانش‌آموز، باید در انجام این مهارت، دارای بازدهی و بهره‌وری بالا باشد و در کمترین زمان ممکن، از عهدهٔ آن برآید. در مورد مهارت شمارهٔ ۴، «دقت»، عاملی مهم در این مهارت محسـوب می‌شـود و «سرعتِ عمل داشتن» چندان مورد توجه نیست. در حالی‌که در مورد مهارت شمارهٔ ۵، «سـرعت» حرف اول را می‌زند و لازم اسـت که دانش‌آموز فوراً، جواب صحیح را بگوید. در هر صورت، چیزی که در مورد همهٔ این مهارت‌ها مشـترک اسـت و از دانش‌آموز انتظار می‌رود، این است که بدون کمترین تأمل، آشـفتگی و فکر کردن، از مهارت‌هایشان به‌گونه‌ای استفاده کنند که انگار به‌طور ناخودآگاه، از قبل با آن‌ها آشـنایی کامل داشـته‌اند و بدون آنکه در انجام آن‌ها به مشکلی برخورند یا اصطلاحاً گیر کنند، از عهدهٔ انجام آن برمی‌آیند. بـرای اینکه منظور خود را واضح‌تر بیان کنیم، فرض کنید یک یادگیرنده، درگیر حل مسئله اسـت. او باید بدون آنکه تحت‌تأثیر واژه‌ها و اعدادِ به‌کار رفته در آن مسـئله شـود، بتواند با آرامش‌خاطر و بدون

پریشـــانی و هراس، از همهٔ مهارت‌های قبلی خود که به خوبی کسب کرده و در به‌کارگیری آن‌ها ماهر شده است، برای انجام آن مسئله استفاده کند.

برای رســیدن به این ســطح از حرفه‌ای شــدن در مهارت‌ها، لازم اســت دانش‌آموزان دائماً در حال تکرار و تمرین باشند، دقیقاً همان چیزی که ما آن را «مشق[۲۶]» می‌نامیم. خیلی از خصوصیات حرفه‌ای شدن در مهارت‌ها از جمله تخصص و بازدهی، صرفــاً از راه تمرین و تکرار آن‌ها در پاســخ به پرسش‌ها و سؤال‌های مختلف حاصل خواهد شــد. با این حال، لازم اســت که هنگام تمرین و تکرار، متوجه یک خطر بالقوه در یادگیری و اســتفاده از مهارت‌ها باشــیم و آن خطر این است که مراقب باشیم که زمان زیادی از تدریــس و فعالیت‌های دانش‌آموزان، صرف تمرین و تکرار مهارت‌ها نشــود و این شبهه را در ذهن دانش‌آموزان القا نکنــد که ماهیت ریاضی، همین تکرار کردن کارها برای کســب مهارت‌های لازم اســت. تأکیــد بیش‌ازحد بــر مهارت‌آموزی به شــیوهٔ تمرین و تکرار، ما را از رســالت اصلی ریاضی یعنی درگیر کردن ذهن دانش‌آموزان با واقعیت‌های زیبای نهفته در ریاضی و توانایی استدلال و تفکر ریاضی داشتن، غافل می‌کند.

مشــکل اساســی دیگــر در راه حرفه‌ای شــدن در مهارت‌های ریاضی، رو به فراموشی گذاشتن و تنزل یافتن آن‌ها در صورت عدم استفاده از آن‌هاست. یک مهارت یاد گرفته شــده، لازم است که تقویت، تثبیت و تازه‌تر شود. شاید در نگاه اول تصور شود که این کار با تمرین و مشق نوشــتن، امکان‌پذیر اســت و این باعث زنده ماندن یک مهارت کســب شده می‌شود. اما راهِ مؤثرترِ تقویت و پویا نگاه داشتن مهارت‌ها، آن است که در فرایندهای مبتنی بر حل مســئله و تحقیق و جســت‌وجوگری و به‌صورت ابزارهای لازم و پیش‌نیاز، آن‌ها را به‌کار گیریم. هم‌چنین، می‌توان از مهارت‌های موجود هنگام یادگیری مهارت‌های جدید، دوباره استفاده کرد. برای مثال، مهارت شمارهٔ ۱ پیش‌نیاز مهارت شــمارهٔ ۲ است و وقتی کسی با مهارت شمارهٔ ۲ درگیر است، به‌طور ناخودآگاه از مهارت شمارهٔ ۱ نیز بارها و بارها کمک می‌گیرد یا به بیانی بهتر، مهارت شــمارهٔ ۲ بر روی مهارت شمارهٔ ۱ بنا شده است. یعنی نکتهٔ مهم این است که لازم است دنبالهٔ مهارت‌هایی که باید در دورهٔ ابتدایی آموخته شوند، با دقت و حساسیت بالا انتخاب شــوند تا مهارت‌هایی که مقدمه و پیش‌نیاز مهارت‌های بعدی هستند، زودتر یادگرفته شوند و این، از اصول مهم تدریسِ ریاضی است.

شاید تأکید بر جنبه‌هایی از یادگیری مهارت‌ها مانند تکرار کردن، از بَر کــردن، تمرین و تقویت، این موضوع را القا کند که یادگیری مهارت‌ها، چیزی شبیه یادگیری طوطی‌وار اســت. در صورتــی که ســویدام و دیزارت[۲۷] (۱۹۸۰؛ ص. ۲۰۸)، در مقالــه‌ای بــا موضوع یادگیری مهــارت، به همین نکتهٔ مهم توجه نموده و معتقدند که در یادگیــری مهارت‌ها، باید به گونه‌ای عمل شــود که تــا حد امکان، بــا یادگیری طوطــی‌وار و روش‌های آن، متفاوت باشــد. آن‌ها تأکید می‌کنند کــه «همهٔ اجزای تشکیل‌دهندهٔ یک کارِ فرایندی، لازم است که به خوبی فهمیده شــود. فهمیــدن اجزایی چون اصــول، مفاهیم و کاربــرد در انجام کارِ فرایندی (مهــارت)، از ملزومات یادگیری مهارت است». در همین رابطه، ریتل ـ جانسون و سیگلر (۱۹۹۸؛ ص. ۱۰۹) نظری مشابه دارند. به باور آن‌ها، «فهم و درک کــودکان از مفاهیم ریاضیِ موجود در فرایندهــا، با توانایی آن‌ها در اجرای آن فرآیندها گره خورده اســت». در مقاله‌ای مهــم و تأثیرگذار در رابطه بــا درک و فهــم دانش‌آمــوزان از فرایندهــای ریاضی، اســکمپ[۲۹] (۱۹۷۷)، فهمیدن در ریاضی را به دو دستهٔ «فهم ابزاری[۳۰]» و «فهم رابطه‌ای[۳۱]» تقسیم کرده است. منظــور وی از فهم ابــزاری به‌طور خلاصه، فهمیدن این است که چه کاری باید انجام داد؛ یعنی دانش‌آموز فقط می‌داند که در هنگام مواجهه با یک موقعیت یا سؤال در ریاضی، چه کاری باید انجام دهد یا چه مهارتی را از خود به نمایش بگــذارد. در صورتی که در فهم رابطه‌ای، وی می‌دانــد که چه باید انجام دهد و مهم‌تر از آن، چرا باید آن کار را انجام دهــد! به این معنی که صرفاً دانش‌آموز یاد نگرفته باشد که برای یک مسئله، چه واکنشی نشان دهد، بلکه دائم بدانــد واکنش‌های او به اجزای مختلف موجود در آن مســئله به چه دلیلی است. مثلاً در مورد مهارت‌های محاســباتی و عــددی در دورهٔ ابتدایی، یک روش بــرای بهره‌گیری از فهم رابطــه‌ای، می‌تواند ایجاد مهــارتِ ارتبــاط، تقویت آن و همراه ســاختنش با زبان مناســب، تصویرها و شــکل‌های متناسب، مواد ملموس مانند ســکه‌ها و بلوک‌های ارزش مکانی و موقعیت‌های معنادار واقعی در زندگی باشد.

مثال‌های عملی

در ادامه، روش و رویکردی عملی و مناســب را برای تدریس مهارت‌های شمارهٔ ۱ و ۳ پیشنهاد می‌کنیم.

مهارت شمارهٔ ۱

در مهارت شمارش رو به جلو یا رو به عقبِ اعداد از ۰ تا ۱۰۰، معلم می‌تواند با مثال‌های ساده‌تر، فرصت‌هایی را برای تکرار، از بَر کردن و شــمارش، برای دانش‌آموزان به‌وجــود آورد. پس از مدتی با تقویــت و تکرار این کار، دانش‌آموزان مهارت لازم را در این زمینه کسب می‌کنند. مثلاً از آن‌ها بخواهید که با ســرعت عمل بیشــتر اما با صدای واضح، این کار را انجام دهند (برای نمونه؛ ۵۶، ۵۷،

۵۸، ۵۹، ۶۰، ... و برعکس ۶۰، ۵۹، ۵۸، ۵۷، ۵۶، ...). در حین این تمرین و تکرارها، معلم باید به فهم رابطه‌ای نیز توجه کافی داشته باشد، مثلاً از ابزارها یا فیلم‌هایی که شمارش معکوسِ پرتاب یک موشک ماهواره‌بر را نشان می‌دهند، یا از کرونومتر و ابزارهای رسم‌کردنِ دیگر مانند محور اعداد، کمک بگیرد. افزون بر این‌ها، معلم می‌تواند بین شمارش شفاهی اعداد و مربع‌های صدتایی ارتباط برقرار کند تا دانش‌آموزان به‌صورت تصویری نیز، شاهد چگونگی فرایند مهارتی که کسب کرده‌اند، باشند.

مهارت شمارهٔ ۳

برای تدریس این مهارت، معلم می‌تواند از مثال‌های ساده‌تر شروع کند و به‌صورت یک دنباله از مثال‌های هدف‌دار به مثال‌های دشوارتر برسد. مثلاً از ۳۷-۵۳ شروع کند و به مثال‌هایی مانند ۲۳۷-۴۵۳ و ۲۳۷-۴۰۳ برسد و با تمرین و تکرار، به تقویت مهارت‌آموزی در این فرایند کمک کند. اما باز هم معلم، باید به فهم رابطه‌ای متناسب با این مهارت نیز توجه داشته باشد و تلاش کند در کنار یادگیری این مهارت، فهم رابطه‌ای مربوط به آن هم در ذهن دانش‌آموزان ایجاد شود. او می‌تواند این کار را به کمک دست‌ورزی با سکه‌ها (۱ پنی، ۱۰ پنی و ۱ پوندی) یا به کمک بلوک‌های ارزش مکانی (برای نمایش یکان، دهگان و صدگان) در رابطه با جمع و تفریق‌هایی که پیش روی دانش‌آموزان است، انجام دهد (برای دیدن چنین مثال‌هایی به هایلاک، ۲۰۰۶؛ ص. ۲-۶۰ مراجعه کنید). مثلاً برای کم کردن ۲۳۷ از ۴۵۳ به کمک بلوک‌ها، ۴ بلوک صدتایی و ۵ بلوک ده‌تایی و ۳ بلوک واحد را انتخاب کرده و همین کار را برای ۲۳۷ نیز انجام می‌دهیم. بعد برای آموزش اینکه چطور یکان ۷ را از یکان ۳ در این دو عدد کم کنیم، توضیح می‌دهیم که می‌توانیم یکی از ۵ دسته بلوک ده‌تایی را باز کنیم و آن را عدد ۱۰ در نظر بگیریم.

مطالعهٔ بیشتر

پیشنهاد می‌کنیم که کتاب اسکمپ (۱۹۷۷) در مورد فهم ابزاری و فهم رابطه‌ای و چگونگی ارتباطشان را با مهارت‌ها و یادگیری آن‌ها در ریاضی دورهٔ ابتدایی، مطالعه کنید. در فصل‌های ۵، ۶، ۸ و ۹ از هایلاک (۲۰۰۶) نیز به خوبی نشان داده شده است که چگونه مهارت در محاسبات کتبیِ قلم و کاغذی و ذهنی، می‌تواند مبتنی بر درک و فهم باشد و چگونه می‌توان این مهارت‌ها را در ارتباط با زبان، تصویرها و مواد ملموس، کسب نمود. منبع دانلن[۳۲] (۱۹۹۸) نیز شامل چند فصل مفید در این زمینه است، از جمله فصل «شایستگی عددی در نوزادان[۳۳]» از واین[۳۴] و بخشی نیز در مورد دانشِ مفهومی و دانشِ فرآیندی از ریتل ـ جانسون و سیگلر که قبلاً نیز به قسمت‌هایی از آن‌ها، اشاره شد.

پی‌نوشت‌ها

1. Investigation (enquiry)
2. Good practice in mathematics teaching
3. Numeracy Strategy Framework
4. Outcome based
5. Jaworski
6. Burton
7. Thyer
8. Tucker
9. Using and Applying Mathematics
10. Principle Learning
11. Gelman and Galistel
12. Principles before Skills
13. One to One Principle

این اصل، با آن‌چه که دانش‌آموزان به‌عنوان «یک‌به‌یک» یا «تناظر یک‌به‌یک» می‌شناسند، متفاوت است و مشخصاً به شمارش تعداد اشیاء اشاره دارد.

14. Set

در این‌جا منظور از «مجموعه»، یک گردایه با تعدادی مشخص از اشیاء است که با مفهوم سطح بالاتر از «مجموعه» که در پایه‌های بالاتر استفاده خواهد شد، متفاوت است. این‌ها مقدمه‌ای برای آماده کردن دانش‌آموزان برای درک مجموعه است.

15. Stable Order Principle
16. Cardinal Principle
17. Abstraction Principle
18. Order Irrelevance Principle
19. Shumway
20. Sowder
21. Skill learning
22. Proficiency
23. Accuracy
24. Efficiency
25. Speed
26. Drill
27. Suydam and Dessart
28. Rittle-Johnson and Sigler
29. Skemp
30. Instrumental Understanding
31. Relational Understanding
32. Donlan
33. Numerical Competence inIinfants
34. Wyenn